

§3.2 第1课时 空间向量运算的坐标表示及平行垂直的条件

【学习目标】

- 1.掌握空间向量的坐标表示及其运算.
- 2.理解空间向量平行与垂直的条件.

【重点难点】

重点: 掌握空间向量的坐标表示及其运算.

难点: 理解空间向量平行与垂直的条件.

【导学流程】

一、问题导入

我们学习过平面向量的标准正交分解和坐标表示, 使几何问题通过向量的坐标运算来解决, 建立了向量的几何运算与代数运算之间的联系, 在空间中, 如何确定向量的坐标呢?

二、探究新知

◇探究一 空间向量的坐标

问题 平面向量的坐标是如何定义的?

【知识梳理】

1. 标准正交基:

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 分别沿 x 轴、 y 轴、 z 轴正方向作_____向量 i, j, k , 这三个的_____向量就构成空间向量的一组基 $\{i, j, k\}$, 这组基叫作标准正交基.

2. 空间向量的坐标

根据空间向量基本定理, 对于任意一个向量 p , 都存在唯一的三元有序实数组 (x, y, z) , 使得 $p = xi + yj + zk$, 反之, 任意给出一个三元有序实数组_____, 也可找到唯一的一个向量 $p = xi + yj + zk$ 与之对应. 把三元有序实数组_____坐标向量, xi, yj, zk 实际上分别是向量 p 在 i, j, k 方向上所作的_____, x, y, z 分别是向量 p 在 i, j, k 方向上所作投影向量的_____.

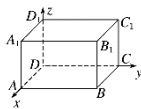
注意点: (1) $|i| = |j| = |k| = 1, i \cdot j = 0, j \cdot k = 0, i \cdot k = 0$.

(2) 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 若 $\vec{OP} = p$, 则 $\vec{OP} = xi + yj + zk$, 所以 $\vec{OP} = (x, y, z)$, 点 P 的坐标为 (x, y, z) .

例1 已知在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ, AB = AC = AA_1 = 4, M$ 为 BC_1 的中点, N 为 A_1B_1 的中点, 建立适当的空间直角坐标系, 求向量 $\vec{AB}, \vec{AC_1}, \vec{BC_1}$ 的坐标?

跟踪训练1 如图所示, 以长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 D 为坐标原点, 过 D 的三条棱所

在的直线为坐标轴, 建立空间直角坐标系, 若 $\vec{DB_1}$ 的坐标为(4,3,2), 则 C_1 的坐标是()



- A. (0,3,2) B. (0,4,2) C. (4,0,2) D. (2,3,4)

◇探究二 空间向量运算的坐标表示

【知识梳理】

设向量 $\mathbf{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b}=(x_2, y_2, z_2)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, 那么

向量运算	向量表示	坐标表示
加法	$\mathbf{a}+\mathbf{b}$	
减法	$\mathbf{a}-\mathbf{b}$	
数乘	$\lambda \mathbf{a}$	
数量积	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	

注意点: (1)空间向量运算的坐标表示与平面向量的坐标表示完全一致.

(2)设 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, 则 $\vec{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$. 即一个向量在空间直角坐标系中的坐标等于表示这个向量的有向线段的终点的坐标减去起点的坐标.

例2 (1)已知 $\mathbf{a}=(-1,2,1)$, $\mathbf{b}=(2,0,1)$, 则 $(2\mathbf{a}+3\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}-\mathbf{b})=$ _____.

(2)在 $\triangle ABC$ 中, $A(2, -5, 3)$, $\vec{AB}=(4,1,2)$, $\vec{BC}=(3, -2, 5)$.

①求顶点 B, C 的坐标;

②求 $\vec{CA} \cdot \vec{BC}$;

③若点 P 在 AC 上, 且 $\vec{AP}=\frac{1}{2}\vec{PC}$, 求点 P 的坐标..

跟踪训练2 (1)若点 $A(-2,2,1)$ 关于 y 轴的对称点为 A' , 则向量 $\vec{AA'}$ 的坐标为()

- A. (4, -4, -2) B. (0, -4, 0)
C. (4, 0, -2) D. (-4, 0, 2)

(2)已知 $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(2, \sqrt{2}, 2\sqrt{3})$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}=(0, \sqrt{2}, 0)$, 则 $\mathbf{a}=$ _____, $\mathbf{b}=$ _____, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}=$ _____.

◇探究三 空间向量平行(共线)和垂直的条件

【知识梳理】

设向量 $\mathbf{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b}=(x_2, y_2, z_2)$.

1. 当 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 时, $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}$, 使得
$$\begin{cases} x_1 = \lambda x_2, \\ y_1 = \lambda y_2, \\ z_1 = \lambda z_2. \end{cases}$$

2. 当 \mathbf{b} 与三个坐标平面都不平行(即 $x_2y_2z_2 \neq 0$) 时, $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

3. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow$ _____.

注意点: (1) 要证明 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 就是证明 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$; 要证明 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 就是证明 $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b} (\mathbf{b} \neq \mathbf{0})$.

(2) 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ 成立的条件是 $x_2 \cdot y_2 \cdot z_2 \neq 0$.

例3 已知空间三点 $A(-2,0,2)$, $B(-1,1,2)$, $C(-3,0,4)$, 设 $\vec{AB} = \mathbf{a}$, $\vec{AC} = \mathbf{b}$.

(1) 设向量 $\mathbf{c} = \left(-\frac{3}{2}, -1, 1\right)$, 试判断 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 与 \mathbf{c} 是否平行?

(2) 若 $k\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $k\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ 互相垂直, 求 k .

跟踪训练3 (1) 已知向量 $\mathbf{a} = (-1, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (3, x, y)$, 且 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 那么 \mathbf{b} 的坐标为()

A. $(3, -6, -3)$ B. $(3, -3, -6)$ C. $(3, 2, 1)$ D. $(3, 1, 2)$

(2) 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, 0, 2)$, 且 $k\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 互相垂直, 则 k 的值是()

A. 1 B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{7}{5}$

三、随堂演练

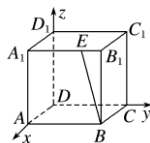
1. 已知 $M(5, -1, 2)$, $A(4, 2, -1)$, O 为坐标原点, 若 $\vec{OM} = \vec{AB}$, 则点 B 的坐标应为()

A. $(-1, 3, -3)$ B. $(9, 1, 1)$ C. $(1, -3, 3)$ D. $(-9, -1, -1)$

2. 已知 $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{p} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{q} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$, 则 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ 等于()

A. -1 B. 1 C. 0 D. -2

3. 如图所示, 在空间直角坐标系中, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, $EB_1 = \frac{1}{4}A_1B_1$, 则 \vec{BE} 等于()



A. $\left(0, \frac{1}{4}, -1\right)$ B. $\left(-\frac{1}{4}, 0, 1\right)$ C. $\left(0, -\frac{1}{4}, 1\right)$ D. $\left(\frac{1}{4}, 0, -1\right)$

4. 已知 $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{c} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{d} = m\mathbf{a} - \mathbf{b}$, 若 $\mathbf{c} \perp \mathbf{d}$, 则 m 等于()

A. 0 B. 1 C. 2 D. -1

四、课堂小结

1. 知识清单:

(1) 空间向量坐标表示. (2) 空间向量坐标的运算. (3) 空间向量平行与垂直的坐标表示.

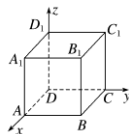
2. 方法归纳: 类比、转化.

3. 常见误区：由两向量共线直接得到两向量对应坐标的比相等.

五、布置作业（课时点对练）

基础巩固

- 已知 $\mathbf{a}=(1, -2, 1)$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}=(-1, 2, -1)$, 则 \mathbf{b} 等于()
A. $(2, -4, 2)$ B. $(-2, 4, -2)$ C. $(-2, 0, -2)$ D. $(2, 1, -3)$
- 已知 $A(3, 4, 5)$, $B(0, 2, 1)$, $O(0, 0, 0)$, 若 $\vec{OC}=\frac{2}{5}\vec{AB}$, 则 C 的坐标是()
A. $(-\frac{6}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{8}{5})$ B. $(\frac{6}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{8}{5})$ C. $(-\frac{6}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$ D. $(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5})$
- 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $A(1, 2, -3k)$, $B(-2, 1, 0)$, $C(4, 0, -2k)$, 则 k 的值为()
A. $\sqrt{10}$ B. $-\sqrt{10}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $\pm\sqrt{10}$
- 已知 $\mathbf{a}=(1, 2, -y)$, $\mathbf{b}=(x, 1, 2)$, 且 $(\mathbf{a}+2\mathbf{b})\parallel(2\mathbf{a}-\mathbf{b})$, 则()
A. $x=\frac{1}{3}, y=1$ B. $x=\frac{1}{2}, y=-4$ C. $x=2, y=-\frac{1}{4}$ D. $x=1, y=-1$
- 以正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 D 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则与 $\vec{DB_1}$ 共线的向量的坐标可以是()



- $(1, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ B. $(1, 1, \sqrt{2})$ C. $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ D. $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$
- 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面垂直, $AA_1=AB=AC=1$, $AB\perp AC$, N 是 BC 的中点, $\vec{A_1P}=\lambda\vec{A_1B_1}$, $\vec{C_1C}=3\vec{C_1M}$, 若 $PN\perp BM$, 则 λ 等于()
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$
 - 如图 1 所示, 以长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 D 为坐标原点, 过 D 的三条棱所在的直线为坐标轴, 建立空间直角坐标系, 若 $\vec{DB_1}$ 的坐标为 $(2, 3, 4)$, 则 $\vec{AC_1}$ 的坐标为_____.

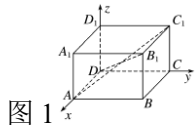


图 1

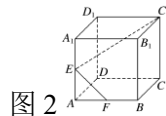


图 2

- 如图 2, E 是棱长为 2 的正方体的棱 AA_1 的中点, F 为棱 AB 上的一点, 且 $\angle C_1EF=90^\circ$, 则线段 AF 的长为_____.
- 已知向量 $\mathbf{a}=(1, 1, 0)$, $\mathbf{b}=(-1, 0, 2)$.
(1)若 $(\mathbf{a}+k\mathbf{b})\parallel(2\mathbf{a}+\mathbf{b})$, 求实数 k ;
(2)若向量 $\mathbf{a}+k\mathbf{b}$ 与 $2\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 的夹角为锐角, 求实数 k 的取值范围.

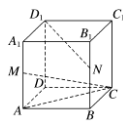
10. 已知 $\mathbf{a}=(1,5,-1)$, $\mathbf{b}=(-2,3,5)$.

(1) 当 $(\lambda\mathbf{a}+\mathbf{b}) \parallel (\mathbf{a}-3\mathbf{b})$ 时, 求实数 λ 的值;

(2) 当 $(\lambda\mathbf{a}+\mathbf{b}) \perp (\mathbf{a}-3\mathbf{b})$ 时, 求实数 λ 的值.

综合运用

11. (多选) 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 M, N 分别是棱 AA_1 和 BB_1 的中点, 则下列选项正确的是()



A. $\vec{AC} \perp \vec{D_1N}$ B. $\vec{MC} \perp \vec{D_1N}$ C. $\vec{MC} \cdot (\vec{A_1B_1} - \vec{A_1D_1}) = 0$ D. $\vec{MC} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{B_1B} + \vec{AD}$

12. 已知 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 是空间的一组标准正交基, 向量 $\{\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 是空间的另一组基, 若向量 \mathbf{p} 在 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 下的坐标为 $(3,2,1)$, 则它在 $\{\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 下的坐标为()

A. $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1)$ B. $(\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2})$ C. $(1, \frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ D. $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

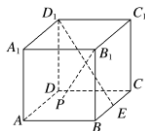
13. 已知 $\mathbf{a}=(\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta)$, $\mathbf{b}=(\cos \theta, \sin \theta, \frac{1}{\tan \theta})$, 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则 θ 为()

A. $-\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $2k\pi - \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ D. $k\pi - \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$

14. 已知 O 为坐标原点, $\vec{OA}=(1,2,3)$, $\vec{OB}=(2,1,2)$, $\vec{OP}=(1,1,2)$, 点 Q 在直线 OP 上运动, 则当 $\vec{QA} \cdot \vec{QB}$ 取得最小值时, 点 Q 的坐标为_____.

拓广探究

15. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 BC 的中点, 点 P 在底面 $ABCD$ 上(包括边界)移动, 且满足 $B_1P \perp D_1E$, 则点 P 在底面 $ABCD$ 上运动形成的轨迹为()



A. 抛物线一部分 B. 线段 C. 一段圆弧 D. 椭圆一部分

16. 设全体空间向量组成的集合为 V , $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$ 为 V 中的一个单位向量, 建立一个“自变量”为向量, “应变变量”也是向量的“向量函数” $f(\mathbf{x})$: $f(\mathbf{x}) = -\mathbf{x} + 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} (\mathbf{x} \in V)$.

(1) 设 $\mathbf{u}=(1,0,0)$, $\mathbf{v}=(0,0,1)$, 若 $f(\mathbf{u})=\mathbf{v}$, 求向量 \mathbf{a} ;

(2) 对于 V 中的任意两个向量 \mathbf{x}, \mathbf{y} , 证明: $f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.